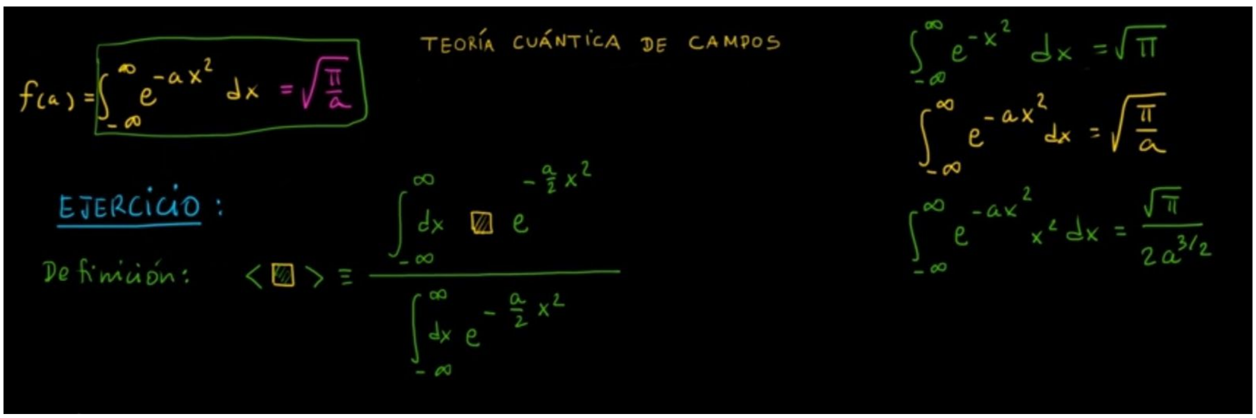
Ejercicio Cap3 - QFT - Teoría Cuántica de Campos -

Carlos B
07 de febrero de 2019

Vamos a recuperar resumen final visto en el capítulo número dos por Javier.



Comencemos por el primer apartado del ejercicio:

a) $$< x > \;=\; \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{\frac{-a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-a}{2}x^2} dx}$$

Vamos a resolverlo de dos modos diferentes.

a.1) Para el cálculo del numerador, vemos que es una integral inmediata. Calculémosla:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{\frac{-a}{2}x^2} dx = \frac{2}{-2a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2a}{2} \cdot x \cdot e^{\frac{-a}{2}x^2} dx = \frac{-1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{a} \cdot x \cdot e^{\frac{-a}{2}x^2} dx = \frac{-1}{a} \cdot \left[e^{\frac{-a}{2}x^2} \right]^{\pm\infty} = \frac{-1}{a} \cdot \left[e^{-\infty} - e^{-\infty} \right] =$$

$$= \frac{-1}{a} \cdot 0 = 0$$

- El denominador ya lo ha calculado Javier, cambiando a por $\frac{a}{2}$ que tenemos en el caso que Javier ha calculado. Por lo tanto, haciendo el cambio tenemos que el denominador tenemos un valor de $\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$.

Por lo tanto, juntando ambos resultado tenemos que:

- $$< x > \ = \ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx} \ = \ \frac{0}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} \ = \ 0$$

a.2) Podemos pensar este primer apartado de la siguiente manera. Como los límites de integración son en toda la recta real, podemos hacer uso de la propiedad que cualquier función impar, $f(-x) \ = \ -f(x)$, al integrar en toda la recta el resultado es nulo, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \ = \ 0$. Así que vamos probar que la función a integrar es impar:

$$f(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-x) \cdot e^{-\frac{a}{2}(-x)^2} dx \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} -x \cdot e^{-\frac{a}{2}x^2} dx \ = \ -\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{a}{2}x^2} dx \ = \ -f(x)$$

Y por lo tanto al ser impar, al integrar en toda la recta real, dará cero. De hecho cualquier x^n, con n impar, tendremos el mismo resultado. Con todo ello concluimos que:

$$< x > \ = \ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx} \ = \ \frac{0}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} \ = \ 0$$

b) $$< x^2 > \ = \ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}$$

Aquí tendremos en cuenta los resultados ya calculados. El numerador ya lo ha calculado Javier, y tiene un valor $\frac{\sqrt{\pi}}{2(\frac{a}{2})^{\frac{3}{2}}} \ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2^3 \cdot \pi}{a^3}} \ = \ \sqrt{\frac{2\pi}{a^3}}$ y el denominador también lo conocemos $\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$. Así concluimos que:

- $$< x^2 > \ = \ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx} \ = \ \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{a^3}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} \ = \frac{1}{a}$$

c) $< x^{2n} > \;=\; \frac{1}{a^n} \cdot (2n-1)(2n-3)(2n-5)\;\cdots\;\cdots\; 5 \cdot 3 \cdot 1$

Para resolver este caso vamos a utilizar el método de inducción. Para ello probamos que la expresión escrita es válida para $n = 1$, supondremos después que es cierta para un n cualquiera y probamos que es válido para $n+1$.

- $n = 1 \;\Rightarrow\; < x^{2\cdot 1} > \;=\; \frac{1}{a^1} \cdot 1 \;=\; \frac{1}{a}$ Luego, para $n = 1$, la expresión es válida.

- Suponemos que se cumple la expresión para cualquier n e intentamos probar que se cumple para $n+1$.

$$< x^{2(n+1)} > \;=\; \frac{1}{a^{n+1}}(2(n+1)-1)(2(n+1)-3)(2(n+1)-5)\;\cdots\;\cdots\; 5 \cdot 3 \cdot 1 \;=$$

$$= \frac{1}{a^{n+1}} \cdot (2n+2-1)(2n+2-3)(2n+2-5)\;\cdots\;\cdots\; 5 \cdot 3 \cdot 1 \;=$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^n} \cdot (2n+1)(2n-1)(2n-3)\;\cdots\; 5 \cdot 3 \cdot 1 \;=$$

$$= \frac{1}{a} \cdot (2n+1) < x^{2n} > \;=\; < x^{2(n+1)} >$$

Como vemos, al calcular con $n+1$, añadimos un factor más como muestra la fórmula de la que hemos partido.